

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Бельков, С. В. Белов, А. П. Жуков, М. С. Павлов, С. В. Пономарев, С. А. Кузнецов, Метод расчета напряженно-деформированного состояния вантОВОБОЛОЧЕЧНЫХ конструкций космических антенных рефлекторов, *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2019, номер 62, 5–18

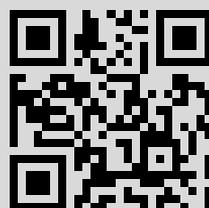
DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/62/1>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 31.211.114.100

28 октября 2020 г., 13:11:59



МАТЕМАТИКА

УДК 519.61, 539.3
DOI 10.17223/19988621/62/1

MSC 15A09

**А.В. Бельков, С.В. Белов, А.П. Жуков, М.С. Павлов,
С.В. Пономарев, С.А. Кузнецов**

**МЕТОД РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ ВАНТОВО-ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ
КОСМИЧЕСКИХ АНТЕННЫХ РЕФЛЕКТОРОВ¹**

Настоящая работа посвящена методу расчета напряженно-деформированного состояния вантово-оболочечных конструкций сетчатых антенных рефлекторов космических аппаратов. Метод реализован в два этапа. На первом этапе методом плотности сил из уравнений равновесия определяются начальные координаты узлов вантовых элементов отражающей поверхности рефлектора. При этом на элементы наложены требования равномерного распределения натяжений. На втором этапе полученные координаты и соответствующие значения натяжений элементов используются как начальное приближение в расчете напряженно-деформированного состояния рефлектора геометрически нелинейным методом конечных элементов.

Ключевые слова: *метод плотности сил, метод конечных элементов, геометрическая нелинейность, сетчатый рефлектор, псевдообратная матрица, нормальное псевдорешение.*

Для развития средств мобильной связи и других коммуникационных устройств необходимо создание космических развертываемых рефлекторных антенн с высоким коэффициентом усиления, способных обрабатывать высокочастотный широкополосный сигнал. Ввиду высокой стоимости проведения натурных экспериментов с конструкциями сетчатых рефлекторов, всегда актуален вопрос построения адекватной математической модели для расчета его напряженно-деформированного состояния (НДС). Кроме того, в математической модели важно учитывать геометрически нелинейное поведение, поскольку даже в зоне упругих деформаций у подобных конструкций возникают значительные перемещения их частей под действием нагрузок [1].

В данной работе задача определения НДС рефлекторов решается методами нелинейной теории упругости, где главным является уравнение равновесия относительно перемещений [2]. Аналитические решения этого уравнения можно получить только в самых простых случаях. По этой причине, в качестве численного метода его решения выбран метод конечных элементов (МКЭ) с учетом геометрической нелинейности [3]. Из опыта расчетов НДС сетчатых антенных рефлекторов [4, 5] установлено, что задача определения поля перемещений узлов конеч-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России, уникальный идентификатор RFMEFI57817X0257.

но-элементной модели (КЭМ) имеет небольшую область сходимости. Поэтому определение начального приближения, принадлежащего области сходимости, является важной задачей. В качестве начального приближения предлагается использовать решение метода плотности сил [6], позволяющих определить равновесные координаты узлов вантовых элементов отражающей поверхности рефлектора с заданными ограничениями по натяжениям на элементы.

Метод плотности сил находит широкие приложения в расчетах вантовых мостов [7], вантовых структур сетчатых рефлекторов [8, 9] и других конструкциях. Заметим, что решаемые задачи в [8, 9] нацелены только на определение формы и точности отражающей поверхности рефлектора без учета деформаций силового каркаса. В работе предлагается двухэтапный метод расчета комплексной конструкции рефлектора, учитывающий как деформацию силового каркаса, так и влияние натяжений оболочки отражающей поверхности.

Этап 1. Формулировка матричного нелинейного метода плотности сил для поиска начальной формы сети вантовых элементов отражающей поверхности рефлектора

При поиске начальной формы сети вантовых элементов вводятся следующие допущения [6, 7]: элементы сети рассматриваются в трехмерной декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ и являются прямолинейными отрезками постоянного сечения, соединенные в узлах. Часть узлов считается свободными (с искомыми координатами), часть – фиксированными (с заданными координатами); отношение q_i силы натяжения T_i i -го элемента сети к его длине l_i – постоянно (плотность силы элемента):

$$q_i = \frac{T_i}{l_i} = \text{const.} \quad (1)$$

Элементы сети не имеют веса; внешние усилия сосредоточены в узлах.

Начальная форма сети определяется решением линейной системы матричных уравнений равновесия относительно координат её узлов и нелинейной системой матричных уравнений, описывающих ограничения по натяжениям элементов [6]:

$$\begin{cases} (\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}) \mathbf{x} + (\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_f) \mathbf{x}_f = \mathbf{f}_x; \\ (\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}) \mathbf{y} + (\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_f) \mathbf{y}_f = \mathbf{f}_y; \\ (\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}) \mathbf{z}_{\text{нар}} + (\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_f) \mathbf{z}_f = \mathbf{f}_z; \\ \bar{\mathbf{L}}(\mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{y}(\mathbf{q}), \mathbf{z}(\mathbf{q})) \bar{\mathbf{q}} - \mathbf{T}_0 = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{C}^T [n \times m]$, $\mathbf{C}_f [m \times n_f]$ – матрицы инцидентности, определяющие топологию вантовой системы; m – общее количество элементов сети; n , n_f – количество свободных и фиксированных узлов соответственно; $\mathbf{Q} [m \times m] = \text{diag}(\mathbf{q})$ – диагональная матрица плотностей сил элементов сети; $\mathbf{x} [n \times 1]$, $\mathbf{y} [n \times 1]$, $\mathbf{x}_f [n_f \times 1]$, $\mathbf{y}_f [n_f \times 1]$, $\mathbf{z}_f [n_f \times 1]$ – векторы-столбцы искоемых и фиксированных координат узлов элементов сети; $\mathbf{z}_{\text{нар}} [n \times 1]$ – вектор-столбец координат узлов сети на поверхности офсетного параболоида отражающей поверхности рефлектора по оси Oz ; $\mathbf{f}_x [n \times 1]$, $\mathbf{f}_y [n \times 1]$, $\mathbf{f}_z [n \times 1]$ – векторы-столбцы координат внешних сил, действующих в искоемых узлах сети; $\bar{\mathbf{L}} [r \times r] = \text{diag}(\mathbf{1})$ – диагональная матрица длин первых r элементов, на которые наложены ограничения равномерного распределения натяжений (здесь и далее на

это будет указывать знак черты сверху), $\bar{\mathbf{q}}[r \times 1]$ – вектор-столбец плотностей сил, $\mathbf{T}_0[r \times 1]$ – вектор-столбец требуемых значений натяжений элементов сети.

В последнем уравнении системы (2), запись $\bar{\mathbf{L}}(\mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{y}(\mathbf{q}), \mathbf{z}(\mathbf{q}))$ означает, что значения длин элементов зависят от вектор-столбца плотности силы. То есть это уравнение является нелинейным относительно \mathbf{q} .

Матрицы инцидентности $\mathbf{C}^T, \mathbf{C}_f$ определяются выражением [6]:

$$\mathbf{C}_s(e, i, j) = [\mathbf{C}, \mathbf{C}_f] = \begin{cases} +1 \text{ для узла } i \text{ элемента } e=1..m; \\ -1 \text{ для узла } j \text{ элемента } e=1..m (i < j); \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3)$$

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}$, $\mathbf{D}_f = \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_f$ и $\det(\mathbf{D}) \neq 0$. Тогда решения первых двух уравнений системы (2) имеют вид [6]

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{f}_x - \mathbf{D}_f \mathbf{x}_f); \\ \mathbf{y} = \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{f}_y - \mathbf{D}_f \mathbf{y}_f). \end{cases} \quad (4)$$

Координаты вектор-столбца $\mathbf{z}_{\text{пар}}$ узлов вантовых элементов отражающей поверхности рефлектора определяются уравнением поверхности офсетного параболоида, который является вырезкой из параболоида вращения (родительского параболоида) круговым цилиндром с диаметром D . Схема поверхности офсетного параболоида показана на рис. 1:

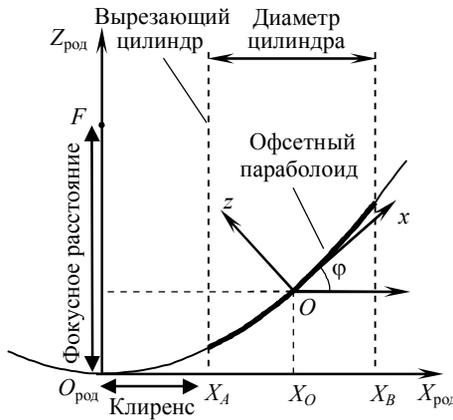


Рис. 1. Схема поверхности офсетного параболоида
Fig. 1. Offset paraboloid surface diagram

Ось вырезающего цилиндра проходит через точку $X_O = D/2 + X_A$ и начало технической системы координат $Oxuz$ офсетного параболоида. Ось Ox является касательной к поверхности родительского параболоида в точке O и расположена под углом φ к оси $O_{\text{род}}X_{\text{род}}$.

Преимущество офсетной конфигурации отражающей поверхности над осесимметричной заключается в том, что в ней система облучения рефлектора, расположенная в точке фокуса F , не загромождала отраженные электромагнитные лучи [8]. Пересечение родительского параболоида и кругового цилиндра происходит по эллипсу с точками, лежащими в плоскости, параллельной Oxy . При этом

ось аппликата Oz не проходит через центр этого эллипса. Такая конфигурация офсетного параболоида называется стандартной [10]. В данной работе офсетный параболоид рассматривается в системе координат $O'x'y'z'$, полученной из $Oxyz$ параллельным переносом по оси Ox на величину Δx таким образом, чтобы ось $O'z'$ уже проходила через центр эллипса. Выражение для Δx имеет вид [11]

$$\Delta x = \frac{X_A^2 - 2X_0^2 + X_B^2}{8F} \sin \varphi. \quad (5)$$

Уравнение поверхности офсетного параболоида в смещенной технической системе координат определяется меньшим решением квадратного уравнения [10]:

$$Az'^2 + Bz' + C = 0, \quad (6)$$

где
$$\begin{cases} A = \sin^2 \varphi; \\ B = -(4F \cos \varphi + 2 \sin \varphi (X_0 + x' \cos \varphi)); \\ C = y'^2 + x'(2X_0 \cos \varphi + x' \cos^2 \varphi - 4F \sin \varphi). \end{cases} \quad (7)$$

В (7) полагаем $x' = x + \Delta x$; $y' = y$; $z' = z$. Меньшее решение (6) имеет вид

$$z' = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (8)$$

Таким образом, задача поиска формы сети вантовых элементов отражающей поверхности рефлектора сводится к определению такого вектор-столбца плотности силы \mathbf{q} , который бы удовлетворял всем четырем уравнениям (2).

Для решения последнего нелинейного уравнения (2) применяется метод Ньютона, в котором по итерационной формуле

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \Delta \mathbf{q} \quad (9)$$

определяется требуемое значение вектора плотности силы \mathbf{q}_{k+1} .

Шаг итерации $\Delta \mathbf{q}$ рассчитывается следующим образом. Обозначив $\mathbf{g}^*(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{L}}(\mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{y}(\mathbf{q}), \mathbf{z}(\mathbf{q}))\bar{\mathbf{q}} - \mathbf{T}_0$, запишем разложение функции $\mathbf{g}^*(\mathbf{q})$ в ряд Тейлора в окрестности начального приближения \mathbf{q}_0 , ограничившись линейными членами [6]:

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{q}_0) + \frac{\partial \mathbf{g}^*(\mathbf{q}_0)}{\partial \mathbf{q}} \Delta \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (10)$$

Выражение (10) преобразуется к системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{G}^T \Delta \mathbf{q} = \mathbf{r}_0, \quad (11)$$

где $\mathbf{G}^T = \frac{\partial \mathbf{g}^*(\mathbf{q}_0)}{\partial \mathbf{q}} [r \times m]$ – матрица Якоби, $\mathbf{r}_0 = [r \times 1] = -\mathbf{g}^*(\mathbf{q}_0)$ – вектор-столбец правой части.

Система (11) является неопределённой, так как в общем случае количество ограничений r меньше количества неизвестных m . Поэтому из всех возможных решений $\Delta \mathbf{q}$ выбирается минимальное по норме L_2 из задачи оптимизации вида [6]

$$\begin{cases} f(\Delta \mathbf{q}) = \Delta \mathbf{q}^T \Delta \mathbf{q} \rightarrow \min, \\ \mathbf{h}(\Delta \mathbf{q}) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (12)$$

где $\mathbf{h}(\Delta\mathbf{q}) = \mathbf{G}^T \Delta\mathbf{q} - \mathbf{r}_0$ – функция связи. Задача (12) решалась методом множителей Лагранжа, где минимизировался функционал [7]:

$$L(\Delta\mathbf{q}, \lambda) = \Delta\mathbf{q}^T \Delta\mathbf{q} - 2\lambda^T \mathbf{h}(\Delta\mathbf{q}), \quad (13)$$

где $\lambda[r \times 1]$ – вектор-столбец множителей Лагранжа.

Стационарные точки (13) находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \Delta\mathbf{q}} = 2\Delta\mathbf{q} - 2\mathbf{G}\lambda = \mathbf{0}; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbf{G}^T \Delta\mathbf{q} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (14)$$

Если $\det(\mathbf{G}^T \mathbf{G}) \neq 0$, то минимальное по евклидовой норме решение (14) имеет вид:

$$\begin{cases} \lambda = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{r}_0; \\ \Delta\mathbf{q} = \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{r}_0 \end{cases} \quad (15)$$

Единственность $\Delta\mathbf{q}$ можно доказать от противного. Действительно, пусть существует какое-то другое решение $\Delta\mathbf{q}^*$, такое, что

$$\begin{cases} \mathbf{G}^T \Delta\mathbf{q} = \mathbf{G}^T \Delta\mathbf{q}^* = \mathbf{r}_0; \\ \|\Delta\mathbf{q}^*\| < \|\Delta\mathbf{q}\|. \end{cases} \quad (16)$$

На основании (15) и (16), можно записать

$$(\Delta\mathbf{q} - \Delta\mathbf{q}^*)^T \Delta\mathbf{q} = (\Delta\mathbf{q} - \Delta\mathbf{q}^*)^T \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{r}_0 = \underbrace{(\mathbf{G}^T \Delta\mathbf{q}^* - \mathbf{G}^T \Delta\mathbf{q})}_{\mathbf{0}} (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{r}_0 = 0. \quad (17)$$

Тогда, по свойству нормы имеем

$$\begin{aligned} \|\Delta\mathbf{q}^*\|^2 &= \|\Delta\mathbf{q}^* + \Delta\mathbf{q} - \Delta\mathbf{q}\|^2 = \|\Delta\mathbf{q}^* + \Delta\mathbf{q}\|^2 + 2 \underbrace{(\Delta\mathbf{q} - \Delta\mathbf{q}^*)^T \Delta\mathbf{q}}_0 + \|\Delta\mathbf{q}\|^2 = \\ &= \|\Delta\mathbf{q}^* + \Delta\mathbf{q}\|^2 + \|\Delta\mathbf{q}\|^2 > \|\Delta\mathbf{q}\|^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, неравенство (18) противоречит неравенству в (16). Это доказывает, что решение $\Delta\mathbf{q}$ является единственным минимальным решением задачи (12).

Заметим, что в выражении $\Delta\mathbf{q}$ в (15) присутствует сомножитель $(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1}$. При расчете вантовой формообразующей структуры (ФОС) зонтичного рефлектора [12], показанной на рис. 2, установлено, что определитель $\det(\mathbf{G}^T \mathbf{G})$ оказался практически нулевым. Из курса линейной алгебры [13] известно, что определитель $\det(\mathbf{G}^T \mathbf{G})$ может быть выражен через собственные значения матрицы $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ по формуле

$$\det(\mathbf{G}^T \mathbf{G}) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_r, \quad (19)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ – собственные значения. На графике рис. 2 показано распределение собственных значений матрицы $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$, соответствующее рассчитанной формообразующей структуре рефлектора.

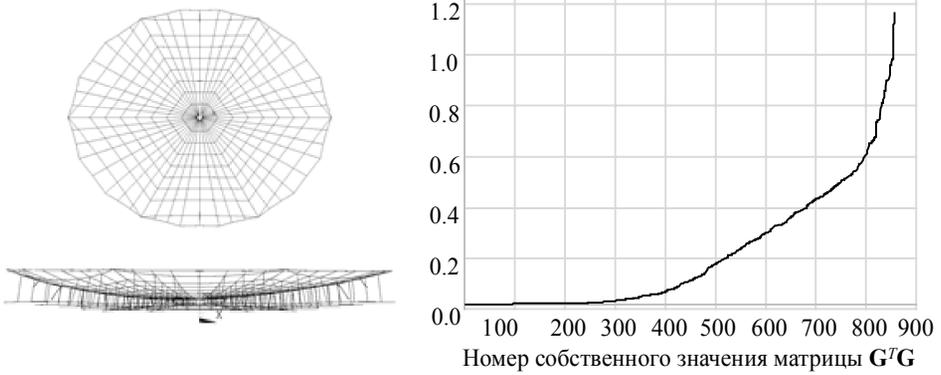


Рис. 2. Вантовая формообразующая структура зонтичного рефлектора и соответствующее распределение собственных значений матрицы $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$

Fig. 2. Cable shape structure of umbrella-type reflector and corresponding eigenvalues distribution of matrix $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$

Установлено, что большинство собственных значений (854 значения из 858) матрицы $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ меньше 1. Это означает, что $\det(\mathbf{G}^T \mathbf{G}) \approx 0$ (либо равно 0), что, в свою очередь, может вызвать проблемы обращения $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$, а значит, и вычисления шага итерации $\Delta \mathbf{q}$. Во избежание проблемы обращения, в формулах (15) предлагается использовать псевдообратную матрицу Мура – Пенроуза, определяемую SVD-разложением (Singular Value Decomposition) [13]:

$$(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^+ = \mathbf{V}_{SVD} \mathbf{\Sigma}^+ \mathbf{U}_{SVD}^T, \quad (20)$$

где $\mathbf{U}_{SVD}[m \times m]$, $\mathbf{V}_{SVD}[m \times m]$ – ортогональные матрицы (в общем случае разных размерностей), $\mathbf{\Sigma}^+[m \times m] = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_{r_A}}, 0, \dots, 0\right)$ – матрица сингулярных чисел $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_{r_A} > 0$, где $r_A = \text{rank}(\mathbf{G}^T \mathbf{G})$. Использование псевдообратной матрицы

позволяет найти минимальное решение по норме первой системы линейных алгебраических уравнений в (15) независимо от её вырожденности либо невырожденности и от числа обусловленности матрицы этой системы. В случае, когда $\det(\mathbf{G}^T \mathbf{G}) \neq 0$ имеет место равенство $(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^+ = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1}$ [13].

Вектор-функция $\mathbf{g}^*(\mathbf{q}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{y}(\mathbf{q}), \mathbf{z}(\mathbf{q}), \mathbf{q}) = \bar{\mathbf{L}}(\mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{y}(\mathbf{q}), \mathbf{z}(\mathbf{q}))\bar{\mathbf{q}} - \mathbf{T}_0$ является сложной функцией. Применяя правило дифференцирования сложной функции, получим выражение для матрицы Якоби \mathbf{G}^T :

$$\mathbf{G}^T = \frac{\partial \mathbf{g}^*(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}}. \quad (21)$$

Выражения для $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}$, $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{q}}$, $\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{q}}$ имеют вид [6]

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{U}; \quad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{q}} = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{V}; \quad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{q}} = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{W},$$

где $\mathbf{U} = \text{diag}(\mathbf{u})$, $\mathbf{V} = \text{diag}(\mathbf{v})$, $\mathbf{W} = \text{diag}(\mathbf{w})$, $\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{C}_f\mathbf{x}_f$, $\mathbf{v} = \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{C}_f\mathbf{y}_f$;
 $\mathbf{w} = \mathbf{C}\mathbf{z} + \mathbf{C}_f\mathbf{z}_f$.

Дифференцируя функцию $\mathbf{g}(\mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{y}(\mathbf{q}), \mathbf{z}(\mathbf{q}), \mathbf{q})$ по $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{q}$, получим

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} = \bar{\mathbf{Q}} \frac{\partial \bar{\mathbf{I}}}{\partial \mathbf{x}}; \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} = \bar{\mathbf{Q}} \frac{\partial \bar{\mathbf{I}}}{\partial \mathbf{y}}; \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} = \bar{\mathbf{Q}} \frac{\partial \bar{\mathbf{I}}}{\partial \mathbf{z}}; \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} = \bar{\mathbf{L}}. \quad (22)$$

На основании выражений для $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{q}}$, (21) и (22) имеем выражение для матрицы Якоби [6]

$$\mathbf{G}^T = \bar{\mathbf{L}}_{rm} - \bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{L}}^{-1} \left(\bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{D}}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{U} + \bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{D}}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{V} + \bar{\mathbf{W}}\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{D}}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{W} \right) \quad (23)$$

где $\bar{\mathbf{L}}_{rm} [r \times m]$ – расширенная матрица $\bar{\mathbf{L}}$ на $m - r$ нулевых столбцов, чтобы вычитание в (23) было определено.

Итерационная формула (9) применяется до тех пор, пока $\|\mathbf{g}^*(\mathbf{q}_{k+1})\| \leq \varepsilon$, где ε – точность вычислений.

Этап 2. Формулировка процедуры определения НДС рефлектора геометрически нелинейным МКЭ

В общем случае задача определения НДС рефлектора основана на нелинейных уравнениях теории упругости (уравнении равновесия, уравнении связи перемещений и деформаций, законе Гука) [11]:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sigma_{kj} \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right) = 0; \quad (24)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right); \quad (25)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E_m}{1 + \nu_m} \cdot (\varepsilon_{ij} + \frac{\nu_m}{1 - 2\nu_m} \cdot \delta_{ij} \varepsilon_{ll}) - \frac{E_m}{1 - 2\nu_m} \cdot \varepsilon_{ij}^T + \sigma_{ij}^0, \quad (26)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера; $u_i, \sigma_{ij}, \sigma_{ij}^0, \varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^T = \alpha \cdot \Delta T \delta_{ij}$, – компоненты вектора перемещения узлов, второго тензора напряжений Пиолы – Кирхгофа, тензора предварительных напряжений, тензора деформаций и тензора температурных соответственно; E_m, ν_m , – модуль упругости и коэффициент Пуассона m -го материала соответственно, $\alpha, \Delta T$ – коэффициент температурного расширения материала, величина изменения температуры соответственно. Значения индексов $i, j, k = 1 \dots 3$.

Граничные условия по перемещениям и напряжениям имеют следующий вид:

$$u_i(\mathbf{x}) = u_i^0(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega; \quad (27)$$

$$n_k \sigma_{kj} \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = p_i^n(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (28)$$

где $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ – вектор, определяющий положение точки в континууме Ω , $p_i^n(\mathbf{x})$ – напряжение на границе $\partial\Omega$, характеризуемое вектором нормали \mathbf{n} . Также

задаются поля начальных напряжений σ_{ij}^0 и температуры:

$$\left. \begin{aligned} T^0 &= T^0(\mathbf{x}), \\ \sigma_{ij}^0 &= \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}), \end{aligned} \right\} \mathbf{x} \in \Omega. \quad (29)$$

Поле напряжений σ_{ij}^0 моделирует напряжения, которые должны установиться в элементах конструкции рефлектора. С помощью поля температур T^0 моделируется натяжение шнуров сети (за счет теплового расширения или сжатия).

Ввиду сложности решения задачи (24) – (29) аналитическими методами, привлекался нелинейный МКЭ, в котором уравнение (24) можно привести к нелинейному матричному уравнению равновесия [11]:

$$\mathbf{K}(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad (30)$$

где \mathbf{u} – вектор-столбец неизвестных перемещений, $\mathbf{K}(\mathbf{u})$ – матрица жесткости, \mathbf{b} – вектор столбец правой части.

Уравнение (30) решается итерационным методом Ньютона – Рафсона, где решения МПС использовались как начальное приближение следующим образом. По рассчитанным координатам узлов системы (2) строится КЭМ вантовой ФОС рефлектора. Далее, в ее элементах задаются начальные напряжения, рассчитанные по формуле

$$\sigma_0^{\text{МПС}} = \frac{1}{S_j} \mathbf{T}^{\text{МПС}}, \quad (31)$$

где S_j – площадь j -го вантового элемента $\mathbf{T}^{\text{МПС}}$ – вектор-столбец натяжений с компонентами, рассчитанными из формулы (1):

$$T_j^{\text{МПС}} = q_j l_j. \quad (32)$$

В вантовых (не рассчитанных по МПС) и оболочечных элементах также задаются некоторые начальные значения напряжений $\sigma_0^{\text{вант}}$, $\sigma_0^{\text{об}}$ в зависимости от требований задачи, а в узлах КЭМ рефлектора задаются нулевые граничные условия по перемещениям вида

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \Omega_{\text{КЭМ}} \setminus \omega_1^{\text{МПС}}, \quad (33)$$

где $\Omega_{\text{КЭМ}}$ – область пространства, занимаемая КЭМ рефлектора, $\omega_1^{\text{МПС}}$ – область пространства, занимаемая вантовыми элементами, рассчитанными по МПС. С физической точки зрения, условие (33) означает, что часть узлов КЭМ рефлектора фиксирована в пространстве. После постановки граничных условий по напряжениям и перемещениям производится первый расчет поля перемещений узлов КЭМ рефлектора итерационным методом Ньютона – Рафсона, учитывающим геометрическую нелинейность в программном комплексе (ПК) ANSYS. Далее полученное решение \mathbf{u}_1 и соответствующие значения напряжений $\sigma_{\text{вант}}^1$, $\sigma_{\text{об}}^1$ вантовых и оболочечных элементов используются как начальное приближение для следующего расчета, но уже с измененными граничными условиями:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \left(\Omega_{\text{КЭМ}} \setminus \omega_1^{\text{МПС}} \cup \omega_2 \right), \quad (34)$$

где ω_2 – область пространства КЭМ рефлектора, на узлы которой уже не наложены условия нулевых перемещений (34), но сходимости метода Ньютона – Рафсона при этом не нарушена. Граничные условия изменяются до тех пор, пока не будет

получено поле перемещений узлов с изначально требуемыми граничными условиями:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \Omega_{\text{КЭМ}} \setminus \bigcup_{i=1}^{N_e-e} \omega_i, \quad (35)$$

где e – количество элементов, на узлы которых не наложены условия нулевых перемещений (35), N_e – общее число элементов. Искомое решение соответствует начальному НДС рефлектора. Окончательное НДС определяется настройкой отражающей поверхности до минимального значения среднеквадратического отклонения (СКО) узлов отражающей поверхности от параболического профиля, определяемого уравнением (8).

Пример расчета НДС ободного рефлектора

На рис. 3 показана схема КЭМ ободного рефлектора, состоящего из балочных, оболочечных и вантовых элементов, построенных в ПК ANSYS.

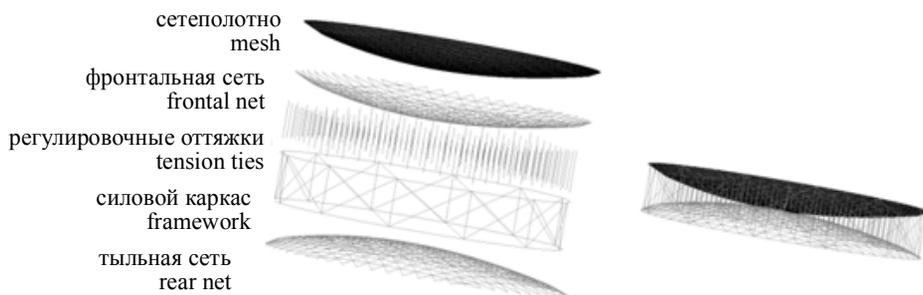


Рис. 3. Схема ободной КЭМ рефлектора в ПК ANSYS
Fig. 3. Reflector finite-element model in ANSYS

Фронтальная (тыльная) сеть, регулировочные оттяжки и шнуры, соединяющие вертикальные стойки силового каркаса, моделировались элементами типа Link180, работающими на растяжение. Их диаметр варьировался от 0.7 до 2 мм. Отражающая поверхность (сетеполотно) моделировалась оболочечными элементами типа Shell180 без изгибной жесткости и толщиной 0.1 мм. Обод и стойки силового каркаса моделировались балочными элементами типа Beam188 прямоугольного и круглого сечения с размерами 0.05×0.009 м и 0.01 м соответственно, высота стоек – 1.96 м. Диаметр ОП рефлектора – 12 м, фокусное расстояние – 8 м, клиренс – 1.125 м. Механические характеристики материалов КЭМ: модуль упругости силового каркаса, вантовых элементов, сетеполотна, составили $2 \cdot 10^{11}$ Па, $15.45 \cdot 10^6$ Па, $1.3 \cdot 10^6$ Па соответственно, коэффициент Пуассона – 0.3.

Этап 1. Согласно методу расчета, на первом этапе находится равновесная форма фронтальной (тыльной) сети рефлектора из решения задачи (2). На рис. 4 показана равновесная форма фронтальной (тыльной) сетей и соответствующее распределение натяжений в их элементах. Узлы на ободе считались фиксированными.

Из рис. 4, *a* видно, что значения перемещений узлов фронтальной (тыльной) сетей практически нулевые при значениях натяжений в элементах, показанных на рис. 4, *b* и *c*. Кроме того, значения натяжений на рис. 4, *b* практически равны целевому значению 10 Н. Это свидетельствует о правильном решении задачи (2).

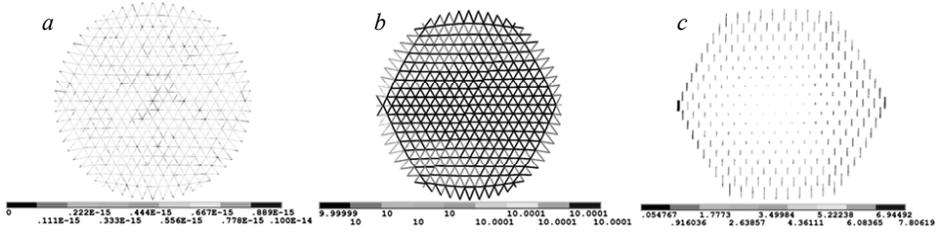


Рис. 4. КЭМ фронтальной (тыльной) сети и регулировочных оттяжек, рассчитанных по МПС: *a* – распределение перемещений узлов, м; *b* – распределение натяжений в элементах фронтальной (тыльной сети); *c* – распределение натяжений в регулировочных оттяжках, Н

Fig. 4. Reflector frontal (rear) net and tension ties finite-element models calculated by force density method: *a* – frontal (rear) net node displacements, m; *b* – frontal (rear) net tensions distribution, N; *c* – tension ties tensions distribution, N

Этап 2. Рассчитанные значения координат в МПС узлов ФОС использовались для построения конфигурации КЭМ рефлектора, приближенной к равновесной, а значения натяжений её элементов использовались как граничные условия по напряжениям. Значение начальных натяжений в сетеполотне и вантовых элементах, соединяющих стойки, составили 2 Н/м и 20 Н соответственно. Кроме того, крайняя правая стойка на рис. 5, *c*) считалась фиксированной, т.е. в ее узлах задавались нулевые граничные условия по перемещениям. В результате расчета получено поле перемещений узлов рефлектора и соответствующие значения сжимающих усилий в элементах силового каркаса.

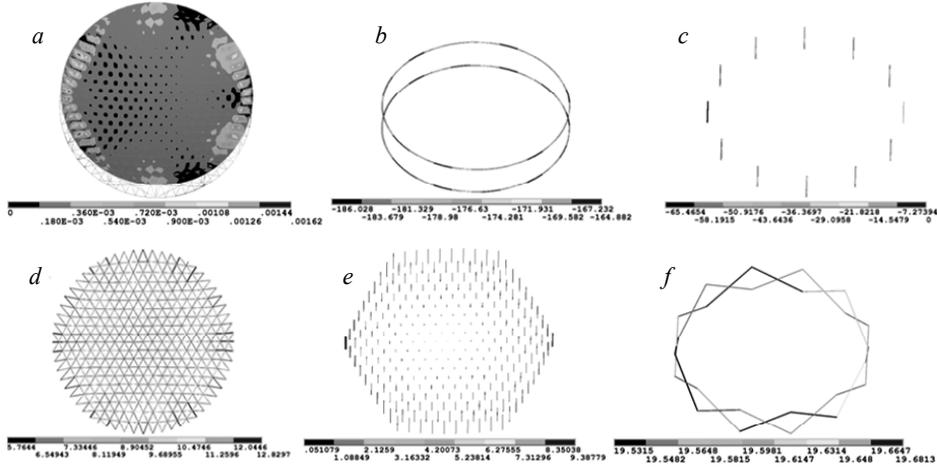


Рис. 5. Параметры НДС рефлектора: *a* – распределение перемещений узлов рефлектор, м; *b* – распределение сжимающих усилий в ободе, Н; *c* – распределение сжимающих усилий в стойках, Н; *d* – распределение натяжений в элементах ФС, Н; *e* – распределение натяжений в элементах оттяжек, Н; *f* – распределение натяжений в вантовых элементах, соединяющих стойки, Н

Fig. 5. Reflector stress-strain state parameters: *a* – reflector node displacements, m; *b* – rim axial forces N; *c* – column axial forces N; *d* – frontal net tensions, N; *e* – tension ties tension, N; *f* – tension forces in the cables connecting framework columns, N

Благодаря использованию решений МПС, расчет НДС рефлектора произведен сразу с изначально требуемыми граничными условиями. Однако в других примерах может потребоваться процедура последовательного изменения граничных условий по перемещениям.

На рис. 5, *d* наблюдается разброс натяжений в элементах ФС. Это объясняется воздействием натяжений сетеполотна и влиянием деформаций силового каркаса.

При этом величина СКО $\Delta_T = \sqrt{\frac{1}{N_T} \sum_{i=1}^{N_T} (T_i - T_0)^2}$ натяжений T_i элементов фронтальной сети от целевого значения $T_0 = 10$ Н составила 1.03 Н, где N_T – количество элементов. Для уменьшения Δ_T рекомендуется учитывать в правых частях уравнений равновесия (2) натяжения оболочки сетеполотна.

Ключевым параметром, характеризующим радиотехнические характеристики и точность рефлектора, является величина СКО отклонения узлов КЭМ ОП от поверхности офсетного параболоида. Чем меньше эта величина, тем выше коэффициент усиления антенны [10]. В предложенной работе СКО выражено формулой

$$\delta_{\text{СКО}} = \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\Delta z_j^{\text{СКО}})^2 \right]^{1/2}, \quad (36)$$

где $\Delta z_j^{\text{СКО}} = z_j^{\text{КЭМ}} + u_j^z - (z_j^{\text{нар}} + M)$, $M = \sum_{j=1}^N (z_j^{\text{КЭМ}} + u_j^z - z_j^{\text{нар}}) / N$ – среднее отклонение, N – количество узлов ОП. $z_j^{\text{нар}} = z_{\text{нар}} (x_j^{\text{КЭМ}} + u_j^x, y_j^{\text{КЭМ}} + u_j^y)$ – значения, вычисленные по формуле (8), $x_j^{\text{КЭМ}}$, $y_j^{\text{КЭМ}}$, $z_j^{\text{КЭМ}}$ – координаты узлов КЭМ ОП, u_j^x, u_j^y, u_j^z – координаты вектора перемещений узлов КЭМ ОП. Наличие константы среднего отклонения M в (36) обусловлено тем, что КЭМ ОП аппроксимирует искривленный участок офсетного параболоида плоскими фигурами, расположенными по одну сторону от касательной плоскости к параболоиду. Это приводит к появлению систематической погрешности, которую необходимо компенсировать. Естественный способ компенсации – введение поправочного слагаемого (см., например, [14]). Иногда удается воспользоваться одинаковостью компенсирующих слагаемых в ячейках КЭМ [14]. Но в нашем случае избран подход, основанный на усреднении погрешности по отклонениям отдельных узлов КЭМ.

Величина $\delta_{\text{СКО}}$ изменялась до минимального постоянного значения с помощью изменения длин регулировочных оттяжек. Регулировка происходила за несколько итераций в круге 5 м. При этом $\delta_{\text{СКО}}$ изменялась от 0.932 до 0.929 мм. Заметим, что конечное значение $\delta_{\text{СКО}}$ близко к начальному. Это также можно отнести к эффективности решений МПС, определяющих геометрию ОП рефлектора, приближенную к равновесной.

Заключение

Сформулирован двухэтапный метод расчета НДС вантово-оболочечных конструкций сетчатых антенных рефлекторов. Метод основан на комбинации нелинейных МПС и МКЭ.

На первом этапе предложено использовать решения нелинейного МПС для вантовых элементов как начальное приближение в нелинейном МКЭ. При этом

шаг итерации плотности силы предлагается рассчитывать через псевдообратную матрицу Мура – Пенроуза в случае плохо обусловленной матрицы $G^T G$.

На втором этапе предлагается использовать процедуру последовательного изменения граничных условий по перемещениям в МКЭ при расчете НДС рефлекторов.

Метод успешно апробирован на 12-метровом ободном сетчатом рефлекторе. На первом этапе решения МПС верифицированы решениями МКЭ. На втором этапе решение задачи определения НДС получено сразу с требуемыми граничными условиями. Кроме того, значения СКО узлов ОП изменились незначительно в процессе настройки регулировочными оттяжками. Это свидетельствует о эффективности решений МПС для данной конструкции.

Если с помощью решений МПС не удастся определить НДС рефлектора сразу с требуемыми граничными условиями, то рекомендуется использовать процедуру последовательного изменения граничных условий по перемещениям узлов КЭМ, описанную выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lewis W. J. Tension structures. Form and behavior. Thomas Telford, 2003. 201 p.
2. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела: учеб. пособие. М.: Наука, 1979. 744 с.
3. Zienkiewicz O. C The finite element method for solid and structural mechanics. Butterworth-Heinemann, 2013. 714 p.
4. Ponomarev S.V., Zhukov A. P., Belkov A. V., Ponomarev V. S., Belov S. V., Pavlov M. S. Stress-strain state simulation of large-sized cable-stayed shell structures // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2015. V. 71. No. 012070. DOI: 10.1088/1757-899X/71/1/012070.
5. Белов С. В., Бельков А. В., Жуков А. П., Павлов М. С., Пономарев В. С., Пономарев С. В., Величко А. И., Халиманович В. И. Оценка напряженно-деформированного состояния силового каркаса крупногабаритного раскрываемого космического рефлектора // Изв. вузов. Физика. 2013. Т. 56. № 7-3. С. 131–133.
6. Schek H.J. The force density method for form finding and computation of general networks // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1974. № 3. P. 115–134.
7. Malerba P. G, Quagliaroli M. Flexible bridge decks suspended by cable nets. A constrained form finding approach // Int. J. Solids and Structures. 2013. V. 50. P. 2340–2352.
8. Morterolle S., Maurin B., Quirant J., Dupuy C. Numerical form-finding of geotensoid tension truss for mesh reflector // Acta Astronautica. 2012. V. 76. P. 154–163.
9. Yang G., Baoyan D., Zhang Y., Yang D. Uniform-tension form-finding design for asymmetric cable-mesh deployable reflector antennas. // Advances in Mechanical Engineering. 2016. V. 8 (10). P. 1–7. DOI: 10.1177/1687814016672367.
10. Tibert A.G. Deployable Tensegrity Structures for Space Applications [Electronic resource]: Doctoral Thesis. URL: <http://www-civ.eng.cam.ac.uk/dsl/publications/TibertDocThesis.pdf>
11. Жуков А.П. Динамика отражающей поверхности крупногабаритного зонтичного рефлектора космического аппарата: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела, 2016. 156 с.
12. Бельков А.В., Белов С.В., Жуков А.П., Павлов М.С., Пономарев С.В. Расчет формообразующей структуры зонтичного сетчатого рефлектора // Решетневские чтения: материалы XXI Международной научно-практической конференции, посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева (Красноярск, 08–11 ноября 2017 г). С. 82–83.
13. Вержбицкий В.М. Вычислительная линейная алгебра: учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2009. 351 с.

14. Бухтяк М.С., Никульчиков А.В. Оценка среднеквадратичного отклонения поверхности параболического рефлектора от шестиугольной фронтальной сети // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 4(20). С.5–14.

Статья поступила 29.10.2019 г.

Belkov A. V., Belov S.V., Zhukov A. P., Pavlov M. S., Ponomarev S. V., Kuznetsov S. A. (2019) METHOD FOR CALCULATION OF THE STRESS-STRAIN STATE FOR CABLE-MEMBRANE SPACE REFLECTOR STRUCTURES *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika I mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 62. pp. 5–18

DOI 10.17223/19988621/62/1

Keywords: force density method, finite-element method, geometrical nonlinearity, grid reflector, pseudoinverse matrix, normal pseudosolution.

Cable-membrane space reflectors are widely used in the modern space industry. They are essential for communication, monitoring, and observation of the Earth and space objects. Experiments with actual reflector structures are quite expensive. Thus, effective calculation techniques should be applied to describe the reflector behavior under operative loads. A specific feature of such structures is its geometrical non-linear behavior, i.e., significant displacements of the elements under loads. Therefore, geometrical nonlinear governing equations of elasticity theory should be applied in describing the mathematical model of the reflector. The exact solution of these equations could be found only in the simplest cases. Thus, numerical methods for such equations should be used. This paper presents a two-stage calculation method of the stress-strain state for reflector structures based on force density and finite-element methods. The first stage embraces the calculation of the cable element shapes for reflector frontal (rear) nets by the nonlinear force density method. It has been proved that, in some cases, calculating the force density vector iteration step could be challenging due to the ill-conditioned matrix being a component part of this vector. To exclude this problem, the Moore–Penrose pseudoinverse matrix was applied. In the second stage, the calculated reflector frontal (rear) net shapes and corresponding values of cable tension were used as an initial estimate in determining the reflector node displacement field via the nonlinear finite-element method. The reflector stress-strain state is determined using a solution sequence in which every next solution involves the previous one as an initial estimation.

Financial support. This work has been supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation. Unique identifier RFMEFI57817X0257.

AMS Mathematical Subject Classification: 15A09

Aleksey V. BELKOV (Candidate of Physics and Mathematics, senior research fellow at Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University (RIAMM TSU), Tomsk, Russian Federation).

Sergey V. BELOV (junior research fellow at RIAMM TSU, Tomsk, Russian Federation). E-mail: belovsv@niipmm.tsu.ru

Andrey P. ZHUKOV (Candidate of Physics and Mathematics, senior research fellow at RIAMM TSU, Tomsk, Russian Federation)

Mikhail S. PAVLOV (junior research fellow at RIAMM TSU, Tomsk, Russian Federation)

Sergey V. PONOMAREV (Doctor of Physics and Mathematics, leading research fellow at RIAMM TSU, Tomsk, Russian Federation)

Stanislav A. KUZNETSOV (leading specialist at JSC ACADEMIAN M.F. RESHETNEV Information Satellite Systems, Zheleznogorsk, Russian Federation)

REFERENCES

1. Lewis W. J. (2003). *Tension structures. Form and behavior*. London: Thomas Telford.
2. Rabotnov Y.N. (1979) *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of solids]. Moscow: Nauka.
3. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. (2013) *The finite element method for solid and structural mechanics*. UK: Butterworth-Heinemann. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2009-0-24909-9>.
4. Ponomarev S.V., Zhukov A.P., Belkov A.V., Ponomarev V. S., Belov S.V., Pavlov M.S. (2015) Stress-strain state simulation of large-sized cable-stayed shell structures. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 71. pp. 012070. DOI: 10.1088/1757-899X/71/1/012070.
5. Belov S.V., Bel'kov A.V., Zhukov A.P., Pavlov M.S., Ponomarev V.S., Ponomarev S.V., Velichko A.I., Halimanovich V.I. (2013) Otsenka napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya silovogo karkasa krupnogabaritnogo raskryvaemogo kosmicheskogo reflektora [Framework stress-strain state estimation for large-sized deployable space reflector]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Fizika*. 56(7-3). pp. 131–133.
6. Schek H.-J. (1974) The force density method for form finding and computation of general networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 3. pp. 115–134.
7. Malerba P.G, Quagliaroli M. (2013) Flexible bridge decks suspended by cable nets. A constrained form finding approach. *International Journal of Solids and Structures*. 50. pp. 2340–2352.
8. Morterolle S., Maurin B., Quirant J., Dupuy C. (2012) Numerical form-finding of geotensoid tension truss for mesh reflector. *Acta Astronautica*. 76. pp. 154–163.
9. Yang G., Baoyan D., Zhang Y., Yang D. (2016) Uniform-tension form-finding design for asymmetric cable-mesh deployable reflector antennas. *Advances in Mechanical Engineering*. 8(10). pp. 1–7. – DOI: 10.1177/1687814016672367.
10. Tibert A.G. (2002) Deployable Tensegrity Structures for Space Applications: Doctoral Thesis. URL: <http://www-civ.eng.cam.ac.uk/dsl/publications/TibertDocThesis.pdf>
11. Zhukov A.P. (2016) *Dinamika otrazhayushchej poverhnosti krupnogabaritnogo zontichnogo reflektora kosmicheskogo apparata* [The dynamics of the reflecting surface of a large-size umbrella-type reflector] Diss. in Physics and Mathematics.
12. Bel'kov A.V., Belov S.V., Zhukov A.P., Pavlov M.S., Ponomarev S.V. Initial estimation of geometrical nonlinear problem for mesh reflector (2017). *Materialy XXI Mezhdunarodnoy nauchnoy konferencii "Reshetnevskie chteniya"* [Materials XXI International scientific conference "Reshetnev reading"]. pp. 82–83.
13. Verzhbitskiy V.M. (2009) *Vychislitel'naya linejnaya algebra* [Computational linear algebra] Moscow: Vysshaya shkola.
14. Bukhtyak M.S., Nikul'chikov A.V. (2012) Otsenka srednekvadratichnogo otkloneniya poverkhnosti parabolicheskogo reflektora ot shestiuhol'noy frontal'noy seti [An estimate for the mean-square deviation of the paraboloid reflector surface from the hexagonal frontal network]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(20). pp. 5–14.

Received: October 29, 2019